Praktični aspekti izbora optimalnog investicionog portfolija

Branko Urošević i Miloš Božović

Ekonomski fakultet

Univerzitet u Beogradu

Tema rada

- Markowitzova portfolio optimizacija – revolucija u oblasti finansija
- Međutim, veoma osetljiva na kvalitet ulaznih podataka
  - Posebno na ocenu očekivanih stopa prinosa
- Poboljšanje kvaliteta ocene:
  - Redukovane (*shrinkage*) ocene očekivanih stopa prinosa
  - Black-Litterman (uključivanje ekspertskog mišljenja)
  - Poboljšanja ocene matrice kovarijanse
- Poboljšanje procesa optimizacije:
  - Robusna optimizacija – uključivanje neizvesnosti u proces optimizacije
- Diskusija značaja uloge ograničenja u portfolio optimizaciji

Referentni Markowitzov problem optimizacije portfolija

- Kompromis između rizika i prinosa

$$
\begin{aligned}
&Min_w \ \ w'\Sigma w \\
&w'\mu = \mu_0 \\
&w'1 = 1
\end{aligned}
$$

- Alternativna formulacija problema:

$$
\begin{aligned}
&Max_w \ w'\mu - \lambda w'\Sigma w \\
&w'1 = 1
\end{aligned}
$$

Svojstva Markowitzovog problema

- Obe formulacije problema imaju egzaktna analitička rešenja
- Prva formulacija daje beskonačan skup mogućih optimalnih investicionih portfolija (u zavisnosti od ciljanog minimalnog očekivanog prinosa) – efikasna granica
  - Za konkretan izbor portfolija potrebno je znati preference investitora (apetit ka riziku)
- Druga formulacija daje jedinstveno rešenje – preference su sadržane u koeficijentu λ

Dodatna ograničenja

- Regulatorna ograničenja
  - Zabrana kratke prodaje (*short selling*)
  - Nametanje gornjih granica na izloženost pojedinačnim kategorijama aktive (prisilna diverzifikacija)
- Upravljačka ograničenja
  - Specifični investicioni stil, limiti na obim trgovanja...
- Previše ograničenja na tržištima sa premalo investicionih instrumenata može povećati rizik umesto da ga smanji – optimizacija nije moguća

Uključivanje transakcionih troškova

- Bez fiksnih troškova i pri linearnim promenljivim troškovima, problem optimizacije se svodi na:

$$Max_w \ w'\mu - \lambda w'\Sigma w - \lambda_{TC}(\beta'|x| + x'\Gamma x)$$

$$x = w - w_0$$

$$w'1 = 1$$

- Ostala ograničenja – realističnija, ali ne dopuštaju egzaktno rešenje problema
  – Neophodni su numerički metodi

Praktični aspekti implementacije

- Jobson & Korkie (1981): portfolio sa jednakim ponderima često ima bolje performanse od onog dobijenog optimizacijom!
  - Kako je to moguće?
- Odgovor: rešenje problema optimizacije osetljivo je na male greške (tj. šum) u ulaznim podacima
- Jedan izlaz je da se poboljša kvalitet ocene ulaznih podataka
- Drugi je da se poboljša proces optimizacije tako da se u njega uključe greške u ulaznim podacima

Ocene očekivanih stopa prinosa

- Obično se koriste srednje vrednosti stopa prinosa iz istorijskog uzorka
- Problem je što su suviše nestabilne
- Neophodno je ocenama nametnuti određenu strukturu (recimo, koristeći jednofaktorske ili višefaktorske modele)
- Alternativa koja daje bolje rezultate je da se koriste redukovane ocene
- U tom slučaju, ocena je ponderisani prosek srednje vrednosti iz uzorka i vektora jedinica – korekcija srednje vrednosti

James-Stein redukovana ocena vektora očekivanih stopa prinosa

- Stein (1956): srednja vrednost multivarijacione normalne slučajne promenljive (*N*>2) koja minimizuje funkciju gubitka:

$$L(\mu, \mu_{est}) = (\mu - \mu_{est})'\Sigma^{-1}(\mu - \mu_{est})$$

- Postoji beskonačno mnogo zadovoljavajućih ocena, ali srednja vrednost iz uzorka **nije** jedna od njih

$$\mu_{JS} = (1-\omega)\bar{\mu} + \omega\mu_0 1$$

$$\omega = Min\left(1, \frac{N-2}{T(\bar{\mu} - \mu_0 1)'\Sigma^{-1}(\bar{\mu} - \mu_0 1)}\right)$$

Koju ocenu izabrati?

- Jorion (1991) daje jedinstven izbor ocene:

$$\mu_{Jorion} = (1-\omega)\bar{\mu} + \omega\mu_g 1$$

$$\mu_g = \frac{1'\Sigma^{-1}\bar{\mu}}{1'\Sigma^{-1}1}$$

$$\omega = \frac{N+2}{N+2+T(\bar{\mu}-\mu_g 1)'\Sigma^{-1}(\bar{\mu}-\mu_g 1)}$$

- Jorionova ocena je veoma popularna u praksi i značajno popravlja performanse optimalnog investicionog portfolija

Ocena matrice kovarijanse

- Optimizacija je manje osetljiva na greške u ocenama volatilnosti i korelacija
- Ipak, uputno je popraviti i ove ocene koliko je moguće
- Nametanje strukture – faktorski modeli, redukovane ocene ili ponderisani prosek ocena dobijenih na osnovu različitih metoda

$$\Sigma_{est} = \frac{1}{3}(\bar{\Sigma} + \Sigma_{CAPM} + \Sigma_{CC})$$

Uključivanje ekspertskog mišljenja

- Investitori često ne žele da se oslanjaju samo na rezultate optimizacije
- Kako uključiti ekspertska mišljenja u proces optimizacije investicionog portfolija?
- Black & Litterman (1992) predlažu model u kome se ekspertska mišljenja kvantifikuju
  (recimo, akcije kompanije Apple će imati veću stopu prinosa od akcija kompanije Google za 5 procentnih poena)
- U modelu je neophodno imati i kvantifikaciju pouzdanosti svakog mišljenja

Uključivanje ekspertskog mišljenja

- Ukoliko ne koristimo mišljenja, možemo raditi sa ravnotežnim ocenama sa tržišta (recimo, na osnovu CAPM).
- Ukoliko koristimo mišljenja, nova ravnoteža je dosledna kako sa tržišnim informacijama, tako i sa ekspertskim mišljenjima:

$$\mu_{BL} = \omega\mu_{market} + (I - \omega)\mu_{views}$$

- U ravnoteži će mišljenje o samo jednom instrumentu uticati na prinose ostalih (kroz korelacije)

Robusna optimizacija

- Do sada smo izložili rezultate koji su vezani za popravke u ulaznim podacima tako da sam problem optimizacije ostane nepromenjen
- Nije moguće izbeći sav šum u ulaznim podacima
- Neizvesnost ocena ulaznih podataka se može uključiti u proces optimizacije
- Čak i u nepovoljnoj situaciji velikih grešaka ocene trebalo bi da postoji način dobijanja optimalnog portfolija – ideja pozajmljena iz raketnog inžinjeringa

Robusna optimizacija

- Jedan način da se formuliše robusna optimizacija:

$$Max_w (Min_{\mu \in U_\delta} \mu w - Max_{\Sigma \in U_\Sigma} \lambda w' \Sigma w)$$
$$w'1 = 1$$

- Na primer, pretpostavimo da:

$$U_\delta(\bar{\mu}) = \{\mu \mid (\mu - \bar{\mu})' \Sigma_\mu^{-1} (\mu - \bar{\mu}) \leq \delta^2\}$$
$$\Sigma_1 \leq \Sigma \leq \Sigma_2$$

Robusna optimizacija

- U tom slučaju, formulacija problema postaje:

$$Max_w \left(\mu w - \lambda w' \Sigma_2 w - \delta \sqrt{w' \Sigma_\mu w} \right)$$

$$w'1 = 1$$

- Uključuje najgore slučajeve za ocenu vektora srednjih vrednosti i matrice kovarijanse
- Moguće je ovaj problem rešiti numerički pomoću standardnih solver paketa.

Zaključci

- U radu su istaknuta značajna praktična pitanja vezana za optimizaciju investicionog portfolija
- Suviše mnogo ograničenja na plitkim tržištima je opasno – optimizacija nije moguća
- Optimizacija je osetljiva na kvalitet ocene ulaznih podataka
- Popravke ulaznih podataka – redukovane ocene, Black-Litterman
- Popravke optimizacije – robusna optimizacija